Μάθημα 9ο

22/03/18

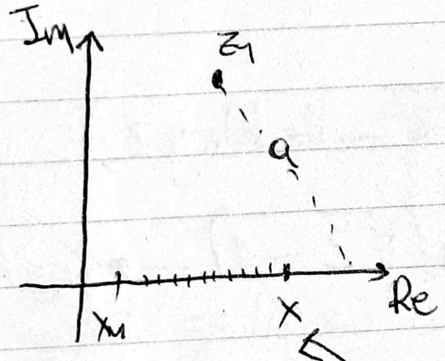
«σκονάκι»: Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$.

① $(z_n)\subset\mathbb{C}$

$\underbrace{z_n \longrightarrow \alpha}\in\mathbb{C} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\in\mathbb{N}\ n\geq n_0\ |z_n-\alpha|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n=\alpha$

[η σύγκλιση ακολουθίας στο $\mathbb{C}$ είναι συμβατή με τη σύγκλιση ακολουθίας στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή αν θεωρήσω μια $(x_n)\subset\mathbb{R}$ με $x_n\longrightarrow x\in\mathbb{R}$ μπορώ εξίσου να θεωρήσω ότι έχω $(x_n)\subset\mathbb{C}$ με $x_n\longrightarrow x\in\mathbb{C}$]



$(x,0)\in\mathbb{C}$

$|x+i0|=|x|$

② $z_n \longrightarrow \infty :\Leftrightarrow \forall r>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\ |z_n|>r$

τα z_n είναι εκτός του κυκλικού δίσκου

Παρατήρηση

(α)

$$z_n \to \infty \Longleftarrow |Re z| \to +\infty \text{ ή } |Im z| \to +\infty$$

αφού $|z_n| = \sqrt{|Re z|^2 + |Im z|^2} \geq |Re z|, |Im z|$

Το αντίστροφο ("$\Longrightarrow$") ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ:

Αντιπαράδειγμα:

$$z_n = \frac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right) + i\frac{n}{2}\left(1+(-1)^n\right)$$

$$\Longrightarrow Re z_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ n, & n=2k+1 \end{cases} \not\to \infty$$

$$Im z_n = \begin{cases} n, & n=2k \\ 0, & n=2k+1 \end{cases} \not\to \infty$$

Ενώ $|z_n| = n \to \infty$

(β)

Η σύγκλιση στο ∞, στο $\mathbb{C}$, ταυτίζεται με τη σύγκλιση ακολουθίας θετικών όρων στο $+\infty$
(στο $\mathbb{R}$)

$\underset{\in(0,\infty)}{x_n} \to \infty :\Longleftrightarrow \forall r>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$
$\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0 : x_n > r$

ΠΡΟΣΟΧΗ Η σύγκλιση προς το ∞ στο $\mathbb{C}$ είναι γενικότερη από τη σύγκλιση προς το $\pm\infty$ στο $\mathbb{R}$

δηλ. $\exists (x_n) \subset \mathbb{R}$ με $x_n \not\to +\infty$ αλλά (ως μιγαδικοί αριθμοί)

$\underbrace{x_n}_{\in\mathbb{C}} \to +\infty$

αλλά $|(-1)^n n| = n \longrightarrow +\infty$ δηλ. $(-1)^n \cdot n \longrightarrow \infty$ (στο $\mathbb{C}$)

δ) $\underbrace{z_n}_{\in \mathbb{C}} \longrightarrow \infty \Leftrightarrow |z_n| \longrightarrow \infty \Leftrightarrow -z_n \longrightarrow \infty$

$\Leftrightarrow z_n e^{i\theta_n} \longrightarrow \infty, \ \theta_n \subset \mathbb{R}$

► Για ακολουθίες που συγκλίνουν στο ∞ έχουμε ότι αν $z_n \longrightarrow \infty$, $w_n \longrightarrow \infty$, $\tilde{z}_n \longrightarrow z \in \mathbb{C}$, $\tilde{w}_n \longrightarrow w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_n \longrightarrow 0$ $a_n \neq 0 \ \forall n$.. $b_n \rightarrow 0$

Τότε:

$\circledast$ $z_n \pm \tilde{z}_n \longrightarrow \infty$, $\tilde{z}_n \pm z_n \longrightarrow \infty$, $z_n w_n \longrightarrow \infty$,

$z_n \tilde{w}_n \longrightarrow \infty$, $\dfrac{\tilde{z}_n}{z_n} \longrightarrow \infty$, $\dfrac{z_n}{\tilde{w}_n} \longrightarrow \infty$,

$\dfrac{z_n}{a_n} \longrightarrow 0$, $\dfrac{\tilde{w}_n}{a_n} \longrightarrow \infty$

Συμβολικά $\infty \pm z = z \pm \infty = \infty$, $w \cdot \infty = \infty = \infty \cdot w = \infty = \infty \cdot \infty$

$\dfrac{z}{\infty} = 0$, $\dfrac{\infty}{z} = \infty$, $\dfrac{w}{0} = \infty$

αλλά ΟΧΙ (δεν ορίζονται) : $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$

$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ δηλ. $\exists$ π.χ (για το $\infty \pm \infty$)

π.χ: $z_n = n \longrightarrow \infty$

$w_n = -n \longrightarrow \infty$

με $z_n + w_n = 0 \not\longrightarrow \infty$

$\tilde{z}_n \longrightarrow z \Rightarrow |\tilde{z}_n| \longrightarrow |z| \Rightarrow \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ |\tilde{z}_n| \leq |z|+1$,

$\exists n_1 \ \forall n \geq n_1 : \ |z_n| > r + |z| + 1$

$\Rightarrow |z_n \pm \tilde{z}_n| \geq |z_n| - |\tilde{z}_n| \geq |z_n| - |z| - 1 > r$.

"Όρια Συναρτήσεων"

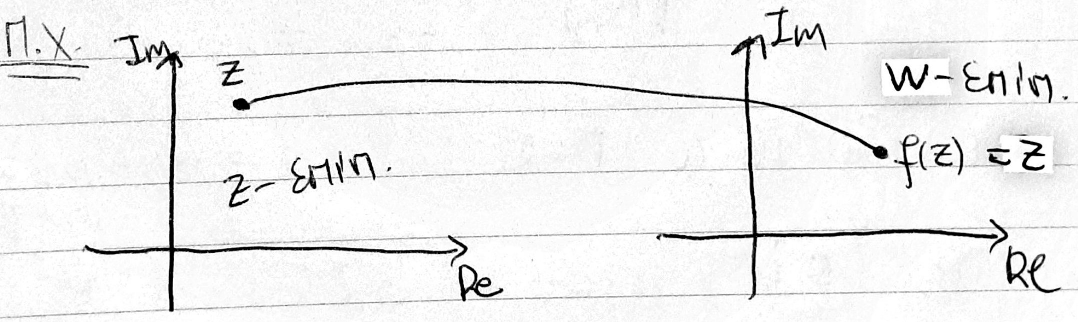
ΟΡΙΣΜΟΣ

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται Μιγαδική Συνάρτηση (τέτοιες μπορούμε να προσθέτουμε, πολλαπλασιάζουμε κτλ...

$(f+g)(z) := f(z) + g(z)$ κλπ...)

Αυτές είναι γενικεύσεις των $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$ και επίσης των $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{R}$

Π.Χ.



Άρα, αφού $z = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\parallel$

$\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$

Μια μιγαδική συνάρτηση αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα διανυσματικό πεδίο $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$: $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$z \longmapsto f(z) = \underbrace{Re(f(z))}_{=:(Re f)(z)} + i\,\underbrace{Im(f(z))}_{=\dots} \qquad D \subset \mathbb{R}$$

$$z = x+iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$= \begin{pmatrix} Re(f(z)) \\ Im(f(z)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

το οποίο είναι το $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Re f(x+iy) \\ Im f(x+iy) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

δηλ. η $f: D \to \mathbb{C}$ αντιστοιχεί (1-1) στο δ.π.

$$\underset{\mathbb{R}^2}{D \subset} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

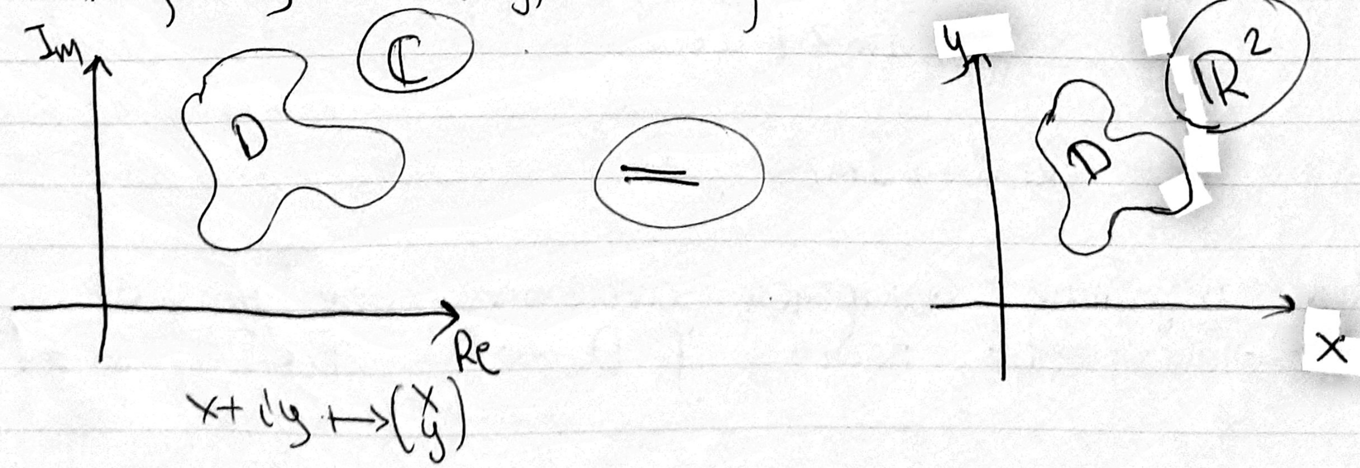
όπου $u, v : D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{R}^2$ και $u(x,y) = Re f\,(x+iy) \underset{op}{=} Re(f(x+iy))$

$v(x,y) = \dots = \dots$

Θεωρούμε $D \subset \mathbb{R}^2$ «το ίδιο με το» $D \subset \mathbb{C}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in D \subset \mathbb{C}\} \subset \mathbb{R}^2$

και $D = \{x+iy \in \mathbb{C} : (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{C}$



$x+iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(1) « καθαρής » Μιγαδικής συνάρτησης : $\mathbb{C} \ni z \longmapsto f(z) = z$
ταυτοτική.

(2) πραγματικής συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής :

$Ref, \; Imf : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall \; f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{C}$

αυτές αντιστοιχούν στις $u, v : D \longrightarrow \mathbb{R}, \; D \subset \mathbb{R}^2$

$u(x,y) = (Ref)(x+iy) = Re(f(x+iy))$ οι συναρτήσεις του πραγματικού και φανταστικού μέρους της f.

$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \; |z| \in \mathbb{R} \;\; \forall \; z \in \mathbb{C}$

$Arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \; z \longmapsto Argz$ με $z = |z| e^{iArgz}$ και
$Argz \in (-\pi, \pi]$

$\lim_{z \to a} f(z) = b$

$\forall \; \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall \; z \in D, \; 0 < |z-a| < \delta$
ισχύει: $|f(z) - b| < \varepsilon$

Ασκηση

Δ.Ο $\lim_{z \to a} z = a$

$\lim_{z \to a} \bar{z} = \bar{a}$

$\lim_{z \to a} Rez = Rea$

$\lim_{z \to a} |z|^{Im} = |a|^{Im}$